$\mathbf{x - y \mid P(x) - P(y)}$

1. Многочлен $P \in \mathbb{Z}[x]$ равен 1 в трёх различных целых точках. Докажите, что у него нет ни одного целого корня.
2. Докажите, что для любого непостоянного многочлена $P \in \mathbb{N}[x]$ найдется такое целое число k, что все числа $P(k)$, $P(k+1)$, …, $P(k+2025)$ будут составными.
3. Пусть a, b, c – различные целые числа, а $P \in \mathbb{Z}[x]$. Докажите, что равенства $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$ не могут выполняться одновременно.
4. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две целые точки. Докажите, что, если расстояние между ними – целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.
5. Докажите, что для каждого непостоянного многочлена $P \in \mathbb{Z}[x]$ найдётся многочлен $Q \in \mathbb{Z}[x]$, такой что многочлен $P(Q(x))$ приводи́м над $\mathbb{Z}$.
6. Докажите, что для любого непостоянного многочлена $P \in \mathbb{Z}[x]$ множество простых делителей его значений в целых точках бесконечно.
7. Дан многочлен $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует не больше одного многочлена $Q(x)$ степени n, удовлетворяющего при всех $x \in \mathbb{R}$ равенству $Q(P(x)) = P(Q(x))$.
8. Даны многочлены $f, g \in \mathbb{Z}[x]$, такие что для каждого $n \in \mathbb{N}$ верно равенство $a_n = \text{НОД}(f(n), g(n)) < 2019$. Докажите, что последовательность (a_n) периодична.
9. Дан многочлен $P(x) = x^2 - 2019$. Докажите, что не существует функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей при всех $x \in \mathbb{R}$ равенству $f(f(x)) = P(x)$.
10. Пусть $P \in \mathbb{Z}[x]$ – многочлен степени $n > 1$, а $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим многочлен $Q_k(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$ (P применён k раз). Докажите, что существует не более n целых чисел t, при которых $Q_k(t) = t$.